عموميات : $A(x_A,y_A,z_A)$ ، $B(x_B,y_B,z_B)$ ، $C(x_C,y_C,z_C)$ ثلاث نقط من الفضاء.
$\vec{u}(x,y,z)$ ، $\vec{v}(x',y',z')$ شعاعان من الفضاء في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(1 **إحداثيات نقطة :** $A(x_A,y_A,z_A)$ في $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معناه : $\vec{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}$

(2 **مركبات شعاع :** $\vec{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$ ، **طويلة شعاع :** $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(3 **طول قطعة (المسافة بين نقطتين) :** $AB=\|\vec{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

(4 **إحداثيات منتصف قطعة :** C منتصف $[AB]$ معناه $C\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

(5 **الشعاعان المتساويان :** $\vec{u}=\vec{v}$ معناه $x=x',y=y',z=z'$

(6 **مركبات المجموع (أو الفرق)** $\vec{u}\pm\vec{v}$. هي $(x\pm x',y\pm y',z\pm z')$

(7 **مركبات الشعاع** $k\vec{u}$ حيث k عدد حقيقي هي (kx,ky,ky)

الارتباط الخطي لشعاعين MEBARKI2016

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما **مرتبطان خطيا** إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم k حيث : $\vec{v}=k\vec{u}$

تحليليا : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$ $(x'=kx$ و $y'=ky$ و $z'=kz)$ أو $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=k$

الجداء السلمي لشعاعين MEBARKI2016

إذا كانت α قيس الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

تحليليا : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$.

شعاع التوجيه و الشعاع الناظمي MEBARKI2016

شعاع التوجيه لـ (مستقيم أو مستوي) هو كل شعاع حامله **يوازي** (المستقيم أو المستوي).
الشعاع الناظمي لـ (مستقيم أو مستوي) هو كل شعاع حامله **يعامد** (المستقيم أو المستوي).

المعادلة الديكارتية لسطح الكرة MEBARKI2016

معادلة سطح الكرة التي مركزها $\Omega(\alpha,\beta,\delta)$ **ونصف قطرها** R **هي :** $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\delta)^2=R^2$

بعد التبسيط نتحصل على معادلة من الشكل : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ حيث : $\vec{AM}.\vec{BM}=0$

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ **حيث :** $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

نقوم بحساب العدد : L حيث $L=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$:

إذا كان : $L\langle 0$ فإن مجموعة النقط مجموعة خالية .

إذا كان : $L=0$ فإن مجموعة النقط هي النقطة : $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$.

إذا كان : $L\rangle 0$ فإن مجموعة النقط هي سطح الكرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{L}$.

أو كتابة المعادلة على الشكل $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\delta)^2=L$

MEBARKI2016

مثال1 : إيجاد مركز ونصف قطر سطح الكرة التي معادلتها من الشكل : $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-11=0$

حساب L **:** $L=\frac{(-4)^2+(6)^2+(-2)^2}{4}-(-11)=25\succ 0$

ومنه مركز الكرة هو: $\Omega\left(\frac{-(-4)}{2},\frac{-(6)}{2},\frac{-(-2)}{2}\right)$ أي : $\Omega(2,-3,1)$ ونصف قطرها : $R=\sqrt{L}=\sqrt{25}=5$

مثال2 : سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ **حيث :** $A(1,-1,3)$ ، $B(0,2,1)$

هي مجموعة غير منتهية من النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ بحيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ أي $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-2\\z-1\end{pmatrix}=0$

ومنه $x(x-1)+(y+1)(y-2)+(z-3)(z-1)=0$ وبعد النشر والتبسيط نجد $x^2+y^2+z^2-x-y-4z+1=0$

المعادلة الديكارتية للمستوي MEBARKI2016

كل مستوي في الفضاء له معادلة ديكارتية من الشكل : $ax+by+cz+d=0$ / $a,b,c,d\in\Re$

إذا كان (P) مستوي معادلته: $ax+by+cz+d=0$ فإن : الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي له

1/معادلة المستوي الذي علمت نقطة منه A **وشعاعه الناظمي** $\vec{n}$**:**

المستوي الذي يشمل A وشعاعه الناظمي $\vec{n}$ هو مجموعة النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

مثال : المستوى الذي شعاعه الناظمي $\vec{\eta}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ والذي يشمل النقطة $A(2,4,-1)$

هو مجموعة غير منتهية من النقط $M(x,y,z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{\eta}=0$ أي $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=0$

ومنه : $1\times(x-2)+(-2)(y-4)+(-1)(z+1)=0$ أي : $x-2-2y+8-z-1=0$ أي $x-2y-z+5=0$

ومنه **معادلة المستوي** هي : $x-2y-z+5=0$.

2/ معادلة المستوي الذي علمت ثلاث نقط منه ليست في استقامية :

لإيجاد معادلة المستوي الذي علمت ثلاث نقط منه A ، B ، C يجب :

1) إثبات أن A ، B ، C تشكل مستوي أي أن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

وذلك بإثبات عدم الارتباط الخطي لـ : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ (أي شعاعين مشكلين من هذه النقط الثلاثة)

2) ثم البحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}$ بحل الجملة : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\\\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0\end{cases}$.

مثال : إيجاد معادلة المستوي الذي يشمل النقط: $A(1,2,3)$ $B(-1,1,0)$ ، $C(2,0,4)$:

-1 إثبات أن A,B,C **تشكل مستوي:** لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\1-2\\0-3\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\0-2\\4-3\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

نلاحظ أن : $\frac{-3}{1}\neq\frac{-1}{-2}\neq\frac{-2}{-1}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

MEBARKI2016

2 - إيجاد شعاع ناظمي لهذا المستوى : نفرض : $\vec{\eta}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لهذا المستوي ومنه: $\begin{cases}\vec{\eta}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{\eta}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}-2a-b-3c=0\\a-2b+c=0\end{cases}$ نقوم بتثبيت العدد الحقيقي c أي: $\begin{cases}-2a-b=3c\\a-2b=-c\end{cases}$

بضرب المعادلة الثانية في 2 نجد : $\begin{cases}-2a-b=3c\\2a-4b=-2c\end{cases}$ بالجمع نجد : $-5b=c$ أي $b=\frac{-c}{5}$

نقوم بتعويض قيمة b في المعادلة الثانية نجد : $a+\frac{2c}{5}=-c$ ومنه $a=-\frac{2c}{5}-c$ أي : $a=-\frac{7c}{5}$.

أي : $a=-\frac{7c}{5}$ ، $b=\frac{-c}{5}$

نقوم بتعويض c بأي عدد حقيقي غير معدوم وليكن -5 نجد : $a=7$ ، $b=1$ ، $c=-5$ ومنه $\vec{\eta}\begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}$.

المستوي الذي ناظمه $\vec{\eta}\begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}$ والذي يشمل النقطة $A(1,2,3)$ هو مجموعة غير منتهية من النقاط $M(x,y,z)$ بحيث:

$\overrightarrow{AM}.\vec{\eta}=0$ أي : $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}=0$ ومنه : $7\times(x-1)+(y-2)+(-5)(z-3)=0$ أي $7x+y-5z+6=0$

3/ معادلة المستوي الذي علمت نقطة منه A و شعاعا توجيه له $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيا:

لإيجاد معادلة المستوي الذي علمت نقطة منه A و شعاعا توجيه له $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يجب :

إثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا ثم البحث عن شعاع ناظمي $\vec{n}$ بحل الجملة : $\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\\vec{v}.\vec{n}=0\end{cases}$.

(نفس طريقة المثال السابق)

ملاحظة :

نقصد بالتمثيل الوسيطي لـ (مستقيم أو مستوي) إيجاد إحداثيات نقط (المستقيم أو المستوي) بدلالة وسيط أو وسيطين.

4/ التمثيل الوسيطي لمستوي:

لإيجاد معادلة المستوي الذي علمت نقطة منه A و شعاعا توجيه له $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يجب:

1) إثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا .

2) المستوي الذي يشمل A و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعا توجيه له :

هو مجموعة غير منتهية من النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ **حيث :** $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

مثال : إيجاد التمثيل الوسيطي للمستوي الذي أشعة توجيهه $\vec{u}(1,-3,5)$ ، $\vec{v}(2,5,-4)$ والذي يشمل النقطة $A(1,2,3)$

1-إثبات أن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا . نلاحظ أن : $\frac{5}{-4}\neq\frac{-3}{5}\neq\frac{1}{2}$ ومنه : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا .

2 - المستوي الذي يشمل A و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعا توجيه له هو مجموعة غير منتهية من النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ حيث :

أي : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\-3\alpha+5\beta\\5\alpha-4\beta\end{pmatrix}$ ومنه : $\begin{cases}x=\alpha+2\beta+1\\y=-3\alpha+5\beta+2\\z=5\alpha-4\beta+3\end{cases}$

كيفية الانتقال من التمثيل الوسيطي إلى المعادلة الديكارتية لمستوي والعكس MEBARKI2016

أ- من المعادلة الديكارتية إلى التمثيل الوسيطي :

نرمز لحرفين من بين x ، y و z بوسيطين مثلا α و β واستنتاج الأخير بدلالتهما .

مثال : إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستوي الذي معادلته الديكارتية $2x+2y-z-11=0$

نضع مثلا : $x=\alpha$ و $y=\beta$ و بما أن $2x+2y-z-11=0$ فإن $2\alpha+2\beta-z-11=0$ وعليه $z=2\alpha+2\beta-11$

إذن التمثيل الوسيطي للمستوي الذي معادلته الديكارتية $2x+2y-z-11=0$ هي $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=2\alpha+2\beta-11 \end{cases}$.

ب- من التمثيل الوسيطي للمعادلة الديكارتية لمستوي :

توجد عدة طرق ولكن أفضلها : نستخرج من التمثيل الوسيطي شعاعي توجيه (مركبات الوسيط الأول و مركبات الوسيط الثاني) و نقطة كيفية من هذا المستوي (وذلك بتقديم أي قيمة للوسيط الأول وأي قيمة للوسيط الآخر) ثم نبحث عن المعادلة الديكارتية للمستوي الذي يشمل نقطة و علم شعاعي توجيه له غير مرتبطين خطيا

مثال : إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=\alpha+2\beta+1 \\ y=-3\alpha+5\beta+2 \\ z=5\alpha-4\beta+3 \end{cases}$.

من خلال هذا التمثيل نستنتج أن : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$ (معاملات α) و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$ (معاملات β) شعاعي توجيه لهذا المستوي .

نلاحظ أن : $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{5}\neq\frac{5}{-4}$ ومنه : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا .

نبحث عن نقطة من هذا المستوي :

نضع $\alpha=0$ و $\beta=1$ نجد : $\begin{cases} x=(0)+2(1)+1=3 \\ y=-3(0)+5(1)+2=7 \\ z=5(0)-4(1)+3=-1 \end{cases}$ ومنه $A(3;7;-1)$ نقطة من هذا المستوي

الآن ابحث عن معادلة المستوي الذي يشمل $A(3;7;-1)$ و : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعي توجيه له .

بعد نقطة عن مستوي MEBARKI2016

(P)مستوي معادلته : $ax+by+cz+d=0$ ، $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة. $d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال : بعد النقطة $A(2,4,-1)$ عن $(P):\ 7x+y-5z+6=0$

هو : $d(A,(P))=\frac{|7(2)+(4)-5(-1)+6|}{\sqrt{(7)^2+(1)^2+(5)^2}}=\frac{29}{\sqrt{75}}=\frac{29\sqrt{75}}{75}$

المسقط العمودي لنقطة على مستوي MEBARKI2016

B **المسقط العمودي للنقطة** A على المستوي (P) معناه :

(1 $B\in(P)$ (انتماء المسقط للمستوي) ، **(2** $\overrightarrow{AB}=k\vec{n}$ ($k\in\Re$ ، $\vec{n}$شعاع ناظمي لـ (P)) (الارتباط الخطي)

مثال1 : إثبات أن $E(3,2,-1)$ هي **المسقط العمودي** لـ$A(1,0,0)$ على المستوي (P) ذو المعادلة ؛ $2x+2y-z-11=0$.

1- هل $E\in(P)$ ؟: لدينا $2(3)+2(2)-(-1)-11=6+4+1-11=0$ ومنه $E\in(P)$.

2- هل $\overrightarrow{AE}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي لـ (P) ؟

لدينا $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}3-1\\2-0\\-1+0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ ولدينا $\vec{\eta}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ هو الشعاع الناظمي لـ(P). نلاحظ أن: $\frac{2}{2}=\frac{2}{2}=\frac{-1}{-1}=1$

ومنه $\overrightarrow{AE}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي لـ(P) إذن E المسقط العمودي لـ A على المسنو (P).

مثال2: إيجاد إحداثيات H المسقط العمودي لـ$B(1,-1;2)$ على المستوي ذو المعادلة : $(p):2x-2y+z+12=0$.

نفرض أن إحداثيات H هي(α,β,γ)ومنه : $H\in(P)$ و$\overrightarrow{BH}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$الشعاع الناظمي لـ (P).

1- لدينا $H(\alpha,\beta,\gamma)\in(P)$ معناه : $2\alpha-2\beta+\gamma+12=0...(1)$.

2- $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\alpha-1\\\beta+1\\\gamma-2\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ معناه: $\frac{\alpha-1}{2}=\frac{\beta+1}{-2}=\frac{\gamma-2}{1}=k/k\in R$ ومنه $\begin{cases}\alpha=2k+1\\\beta=-2k-1...(2)\\\gamma=k+2\end{cases}$.

بتعويض (2) في (1) نجد : $2(2k+1)-2(-2k-1)+(k+2)+12=0$ أي: $9k+18=0$ ومنه $k=-2$

بتعويض قيمة k بـ -2 في (2) نجد $\begin{cases}\alpha=2(-2)+1\\\beta=-2(-2)-1\\\gamma=(-2)+2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=3\\\gamma=0\end{cases}$ ومنه إحداثيات H هي$(-3,3,0)$.

MEBARKI2016 التمثيل الوسيطي لمستقيم

أ/ الذي علمت نقطة منه A وشعاع توجيه له $\vec{u}$:

المستقيم الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ هو مجموعة النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ حيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ حيث $t\in\Re$.

مثال : التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي شعاع توجيهه $\vec{\mu}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ والذي يشمل النقطة $A(1,-1,-2)$

هو مجموعة غير منتهية من النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{\mu}$.

ومنه : $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix}$ ومنه : $\begin{cases}x-1=t\\y+1=-2t\\z+2=t\end{cases}$ ومنه التمثيل الوسيطي لهذا المستقيم هو : $(\Delta):\begin{cases}x=t+1\\y=-2t-1\\z=t-2\end{cases}$.

ب/ الذي علمت نقطتان منه A و B:

المستقيم الذي يشمل النقطتان A و B هو مجموعة النقط من الفضاء $M(x,y,z)$ حيث $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in\Re$.

مثال : التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') الذي يشمل $A(1,0,1)$ ، $B(-1,2,2)$

هو مجموعة غير منهية من النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$.

ومنه $\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1-1\\2-0\\2-1\end{pmatrix}$ أي $\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ ومنه: $(\Delta'):\begin{cases}x=-2t+1\\y=2t\\z=t+1\end{cases}$.

كيفية إيجاد احداثيات نقطة من مستقيم علم تمثيله الوسيطي MEBARKI2016

لإيجاد إحداثيات نقطة من مستقيم علم تمثيله الوسيطي يكفي إعطاء قيمة ثابتة للوسيط ثم حساب x و y و z .

مثال : اختيار نقطة A من المستقيم ذو التمثيل الوسيطي : $(\Delta):\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = t-2 \end{cases}$.

نختار قيمة لـ t ولتكن $t=1$ ومنه إحداثيات A هي $\begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -2(1)-1 = -3 \\ z = (1)-2 = -1 \end{cases}$ أي $A(2,-3,-1)$ نقطة من (Δ)

كيفية التحقق من انتماء نقطة إلى مستقيم علم تمثيله الوسيطي MEBARKI2016

لمعرفة أن نقطة تنتمي إلى مستقيم علم تمثيله الوسيطي يكفي تعويض x و y و z بإحداثيات النقطة ثم حساب قيمة الوسيط إذا كانت متساوية فإن النقطة تنتمي للمستقيم و إذا كانت قيم الوسيط غير متساوية فإنها لا تنتمي لهذا المستقيم

مثال : نريد إثبات أن $(\Delta):\begin{cases} x = 2t-5 \\ y = t-3 \\ z = 3t-4 \end{cases}$ $A(1,0,5)\in$

لدينا : $\begin{cases} 1 = 2t-5 \\ 0 = t-3 \\ 5 = 3t-4 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \\ t = 3 \end{cases}$ (قيم الوسيط متساوية) أي $A\in(\Delta)$.

كيفية إيجاد المسقط العمودي لنقطة على مستقيم علم تمثيله الوسيطي MEBARKI2016

B **المسقط العمودي للنقطة** A على المستقيم (Δ) معناه :

1) $B\in(\Delta)$ (انتماء المسقط للمستقيم) ، **2)** $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ ($\vec{u}$ شعاع توجيه لـ (Δ)) (التعامد)

مثال: إيجاد إحداثيات B المسقط العمودي للنقطة $A(-1;0;5)$ على المستقيم $(\Delta):\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t-3 \\ z=3t-2 \end{cases}$

نفرض : $B(\alpha,\beta,\gamma)$ ، بما أن : B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) فإن : **1)** $B\in(\Delta)$ ، **2)** $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$.

$B\in(\Delta)$ معناه: $\begin{cases} \alpha=2t-3 \\ \beta=t-3 \\ \delta=3t-2 \end{cases}$ ، $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ معناه $\begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \beta \\ \delta-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=0$ $\Leftarrow 2\alpha+2+\beta+3\delta-15=0 \Leftarrow 2\alpha+\beta+3\delta-13=0$

ومنه $2(2t-3)+(t-3)+3(3t-2)-13=0 \Leftarrow 14t-28=0 \Leftarrow t=2$ وعليه $\begin{cases} \alpha=2(2)-3=1 \\ \beta=(2)-3=-1 \\ \delta=3(2)-2=4 \end{cases}$; إذن : $B(1,-1,4)$

كيفية إيجاد المسافة بين نقطة و مستقيم علم تمثيله الوسيطي MEBARKI2016

الطريقة العامة هي إيجاد المسقط العمودي للنقطة على المستقيم ثم حساب المسافة بين النقطة ومسقطها

مثال: إيجاد المسافة بين $A(-1;0;5)$ و المستقيم $(\Delta):\begin{cases} x=2t-3 \\ y=t-3 \\ z=3t-2 \end{cases}$

في المثال السابق وجدنا $B(1,-1,4)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ومنه : $d(A;(\Delta))=AB$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} \Leftarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftarrow AB=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ منه $d(A;(\Delta))=AB=2\sqrt{2}$

المرجع في الفضاء MEBARKI2016

نقول عن G **مرجح** الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$ إذا وفقط إذا كان :

$\alpha+\beta+\delta\neq 0$ و $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

و منه : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{AC}$ أو $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta}\overrightarrow{CB}$

خواص المرجح في الفضاء MEBARKI2016

I **منتصف** $[AB]$ $\Leftrightarrow$ I مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\alpha)\}$ / $\alpha\neq 0$ (المعاملات متساوية)

G **مركز ثقل مثلث** ABC $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\alpha),(C,\alpha)\}$ / $\alpha\neq 0$ (المعاملات متساوية)

G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ $G\in(AB)$ (استقامة مرجح نقطتين مع النقطتين)

G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$ $\Leftrightarrow$ $G\in(ABC)$.

القطعة $[AB]$ عبارة عن مجموعة مرجحات الجمل المثقلة $\{(A,t),(B,1-t)\}$ / $t\in[0;1]$.

إذا كان I مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$ فإن G مرجح الجملة $\{(I,\alpha+\beta),(C,\delta)\}$

وتسمى بخاصية التجميع

مجموعة النقط :

إذا كان G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$ / $\alpha+\beta+\delta\neq 0$

فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء فإن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$

إذا كان : $\alpha+\beta+\delta=0$ فإن : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M (نطبق علاقة شال للتخلص من M)

المرجح تحليليا MEBARKI2016

$\alpha+\beta+\delta\neq 0$ ، G مرجح الجملة : $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$ $\Leftrightarrow$

$x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta}$ ، $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta}$ ، $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C}{\alpha+\beta+\delta}$

حالات خاصة :

I **منتصف** $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ ، $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ ، $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

G **مركز ثقل مثلث** ABC $\Leftrightarrow$ $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$ ، $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$ ، $z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

مجموعة النقط في الفضاء MEBARKI2016

1/ مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $AM=\alpha$ هي :

إذا كان : $\alpha<0$: مجموعة خالية ، إذا كان $\alpha=0$: النقطة A

و إذا كان $\alpha>0$. سطح الكرة الذي مركزها A ونصف قطرها α

2/ مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $AM=BM$ هي : **المستوي المحوري** للقطعة $[AB]$.

3/ مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ هي : **المستوي** الذي يشمل النقطة A وشعاعه الناظمي $\vec{u}$.

4/ مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي : **سطح الكرة** التي قطرها $[AB]$.

طرق الإجابة عن بعض الأسئلة في الهندسة الفضائية MEBARKI2016

1) تعامد أو توازي مستقيمين أو مستويين :

لإثبات **تعامد مستقيمان** يكفي إثبات **تعامد** أشعة توجيههما (الجداء السلمي لهما معدوم).
لإثبات **تعامد مستويان** يكفي إثبات **تعامد** الأشعة الناظمية لهما (الجداء السلمي لهما معدوم).
لإثبات **توازي مستقيمان** يكفي إثبات **الارتباط الخطي** لأشعة توجيههما .
لإثبات **توازي مستويان** يكفي إثبات **الارتباط الخطي** للأشعة الناظمية لهما .
لإثبات **توازي مستوي ومستقيم** يكفي إثبات **تعامد** الشعاع الناظمي للمستوي و شعاع توجيه المستقيم .
لإثبات **تعامد مستوي ومستقيم** يكفي إثبات **الارتباط الخطي** الشعاع الناظمي للمستوي و شعاع توجيه المستقيم

مثال: هل المستويان (p_1) و (p_2) متعامدين؟ حيث : $(p_1): 2x-3y+5z-5=0$ و $(p_2): -4x-6y-2z+10=0$

لدينا : $\vec{n_1}(2;-3;5)$ و $\vec{n_2}(-4;-6;-2)$ الأشعة الناظمية لـ (p_1) و (p_2) على الترتيب.
لدينا. : $\vec{n_1}.\vec{n_2}=(2)(-4)+(-3)(-6)+(5)(-2)=0$ ومنه (p_1) و (p_2) متعامدين.

2) كيفية التأكد من أن معادلة ديكارتية (أعطيت عبارتها) هي للمستوي مثلا (ABC)

يجب أولا إثبات عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
ثم التحقق من انتماء النقط الثلاث للمستوي الذي أعطيت معادلته وذلك بتعويض x ، y و z بإحداثيات النقط

3) كيفية إيجاد معادلة سطح كرة التي علم مركزها وتمس مستوي علمت معادلته :

نصف قطر سطح الكرة التي مركزها A والتي تمس المستوي (P) هو $d(A;(P))$
أي مركزها A ونصف قطرها $d(A;(P))$

4) كيفية إيجاد معادلة مستوي يشمل نقطة و يحوي مستقيم علم تمثيله الوسيطي :

لإيجاد معادلة مستوي يشمل نقطة و يحوي مستقيم علم تمثيله الوسيطي نأخذ نقطتان من المستقيم (بإعطاء قيمتين مختلفتين للوسيط ثم حساب x ، y و z) ثم نبحث عن معادلة المستوي الذي يشمل النقط الثلاث.
(النقطة المعلومة و النقطتان المستخرجتان من المستقيم)

5) كيفية إيجاد معادلة مستوي يحوي مستقيمان متوازيان :

لإيجاد معادلة مستوي يحوي مستقيمان متوازيان نأخذ نقطتان من مستقيم و نقطة من المستقيم الآخر ثم نبحث عن معادلة المستوي الذي يشمل النقط الثلاث.

6) كيفية إيجاد معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان :

لإيجاد معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان نأخذ نقطة من أحد المستقيمين ثم نبحث عن معادلة المستوي الذي يشمل النقطة و أشعة توجيهه هما أشعة توجيه كل من المستقيمين (لأنهما غير مرتبطان خطيا)

7) ملاحظة عن تمثيل وسيطي بوسيطين :

ليكن التمثيل الوسيطي الآتي : $\begin{cases} x=at+bk+c \\ y=a't+b'k+c' \; ; t\in\Re ; k\in\Re \\ z=a''t+b''k+c'' \end{cases}$ و، $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a' \end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix}$ أشعة توجيهه.

إذا كان: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فهذا التمثيل الوسيطي :المستوي الذي يشمل $A(c;c';c'')$ و أشعة توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$
إذا كان: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا فهذا التمثيل الوسيطي :المستقيم الذي يشمل $A(c;c';c'')$ و شعاع توجيهه هو $\vec{u}$ أو $\vec{v}$

MEBARKI2016

8) كيفية إيجاد قيس زاوية هندسية انطلاقا من ثلاث نقط :

لإيجاد مثلا قيس الزاوية الهندسية $A\hat{B}C$ نتبع ما يلي :
نقوم بحساب مركبات كل من الشعاعين : $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ ثم نستنتج الطولين BA و BC . ثم نحسب $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
بعدها نجد : $\cos A\hat{B}C = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}$ ثم نستنتج قيس الزاوية $A\hat{B}C$

9) معادلة المستوي المحوري:

لإيجاد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ مثلا نتبع إحدى الطريقتين :
أ- نفرض : $M(x;y;z)$ ثم نحسب مركبات كلا من $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ ثم الطولين AM و BM
و تصبح معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ هو تبسيط المساواة $AM^2 = BM^2$.
ب- أو إيجاد إحداثيات I منتصف $[AB]$ و مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$.
و تصبح معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ هو تبسيط $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$ حيث $M(x;y;z)$.

10) كيفية إثبات أن ثلاث أشعة من نفس المستوي (أو ليست من المستوي)

لإثبات أن الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي يكفي حل الجملة : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$ ذات المجهولين α و β .
إذا وجدنا حلا يحقق المعادلات الثلاث فإن : $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي
وإذا كانت الجملة لا تقبل حلا يحقق المعادلات الثلاث فإن : الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست من نفس المستوي .

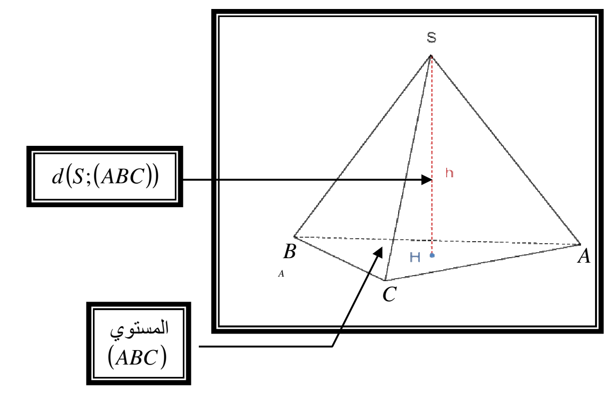
11) كيفية إثبات أن النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي :

الطريقة 1) : إيجاد معادلة مستوي من ثلاث نقط ليست في استقامية ثم إثبات انتماء النقطة الرابعة لهذا المستوي .
الطريقة 2) : إثبات أن الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي . (ثلاث أشعة مكونة من النقط الأربعة)

الحجوم MEBARKI2016

حجم الهرم هو **ثلث مساحة القاعدة في الارتفاع** (الارتفاع هو طول القطعة التي تشمل الرأس الأساسي للهرم و العمودية على قاعدته . (رباعي الوجوه هو هرم قاعدته عبارة عن مثلث)
ملاحظة : إذا كان ارتفاع الهرم مجهول في هرم فيتم حسابه بإيجاد المسافة بين الرأس الأساسي و المستوي الذي يشمل رؤوس القاعدة .

$$V = \frac{1}{3} \times h \times B$$



ملاحظة:

معادلة المستوي (XOY) : $z=0$ ، (XOZ) : $y=0$ ، (YOZ) : $x=0$ ،

التمثيل الوسيطي لـ : محور الفواصل $(O,\vec{i})$ $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ ، **التراتيب** $(O,\vec{j})$ $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ ، **الرواقم** $(O,\vec{z})$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$